به نام زندگی

متغیرهای تصادفی Random Variables

همان طور که اشاره شد، می خواهیم ابزارهای کار با متغیرهای تصادفی را معرفی کنیم. به طور خاص در این بخش به دنبال ابزارهایی هستیم که با کمک آنها بتوانیم احتمال هر پیش آمدی در ارتباط با متغیر تصادفی را به راحتی بیاوریم. این

ابزارها، توابع احتمال یک متغیر تصادفی هستند.

برای آشنا شدن با توابع احتمال یک متغیر تصادفی، از متغیرهای تصادفی گسسته شروع می کنیم.

فرض کنیم $X = X(\xi)$ یک متغیر تصادفی گسسته باشد که مقادیری از مجموعه‌ی

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

را اختیار می‌کند. در این صورت داریم:

$$P_r\{X = x_i\} = P_i$$

یک تابع احتمال به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت

$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \begin{cases} P_i & x = x_i \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

(otherwise)

تابع $P_X(x)$ یا تابع pmf

Probability **m**ass **f**unction

برای متغیر تصادفی X می‌گیریم.

به عبارت دیگر $P_X(x)$ نشان دهنده‌ی احتمال نقاط برای متغیر تصادفی X

است.

با توجه به آنچه در مورد احتمال پیش آمدها می دانیم، می توانیم نتیجه گیری های زیر را داشته باشیم.

$$\forall x \; ; \quad 0 \leq P_X(x) \leq 1$$

$$P_X(x) = \underbrace{P_r\{X = x\}}_{1 \geq \text{احتمال یک پیش آمد} \geq 0} = \begin{cases} P_i & x = x_i \in \mathcal{X} \\ 0 & oth. \end{cases}$$

* در واقع $P_X(x_i)$ احتمال یک پیشامد ساده به صورت $\{X = x_i\}$ است و با کمک آن می‌توان احتمال هر پیشامدی در ارتباط با X را به دست آورد. زیرا هر پیشامدی را می‌توان به صورت اجتماع چند پیشامد ساده نوشت.

* در مورد تابع pmf هر متغیر تصادفی X، همواره داریم

$$\sum_{x} P_X(x) = 1$$

یا

$$\sum_{x_i} P_X(x_i) = 1$$

یا

$$\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 1$$

(یعنی $P_X(x)$ یک تابع نرمالیزه است)

مثال: یک سکه را n بار پرتاب می کنیم. اگر احتمال رخداد شیر یا H در هر بار پرتاب سکه برابر p باشد، متغیر تصادفی که نشان دهنده‌ی تعداد شیرها در n بار انجام آزمایش است با X نمایش می دهیم. تابع pmf این متغیر تصادفی را به دست بیاورید.

همان طور که می دانیم، متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای است
Binomial

$$P_r\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x \in \{0, 1, \ldots, n\} = \mathcal{X}$$

$$\Longrightarrow P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{oth.} \\ & x \notin \mathcal{X} \end{cases}$$

مثال 2 : در ارتباط با متغیر تصادفی لحظه‌ای مثال 1 ، احتمال پیش آمد های زیر را به دست بیاورید.

A : پیش آمد اینکه تعداد دفعات شیر یک عدد زوج باشد.

B : پیش آمد اینکه بیش از 3 بار ، شیر ظاهر شود.

$$P(A) = P_r\{X = 2k \mid 2k \leq n,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$P(A) = \sum_{\substack{x=2k \\ 2k \leq n \\ k \in \mathbb{Z}}} P_X(x)$$

$$\equiv \{X = 0 \ \underset{\sim}{\overset{\cup}{\iota}} \ X = 2 \ \underset{\sim}{\overset{\cup}{\iota}} \ \dots \quad \dots\}$$

$$P(B) = P_r\{X>3\}$$

$$P(B) = P_r\{X=4 \cup X=5 \cup \ldots \cup X=n\}$$

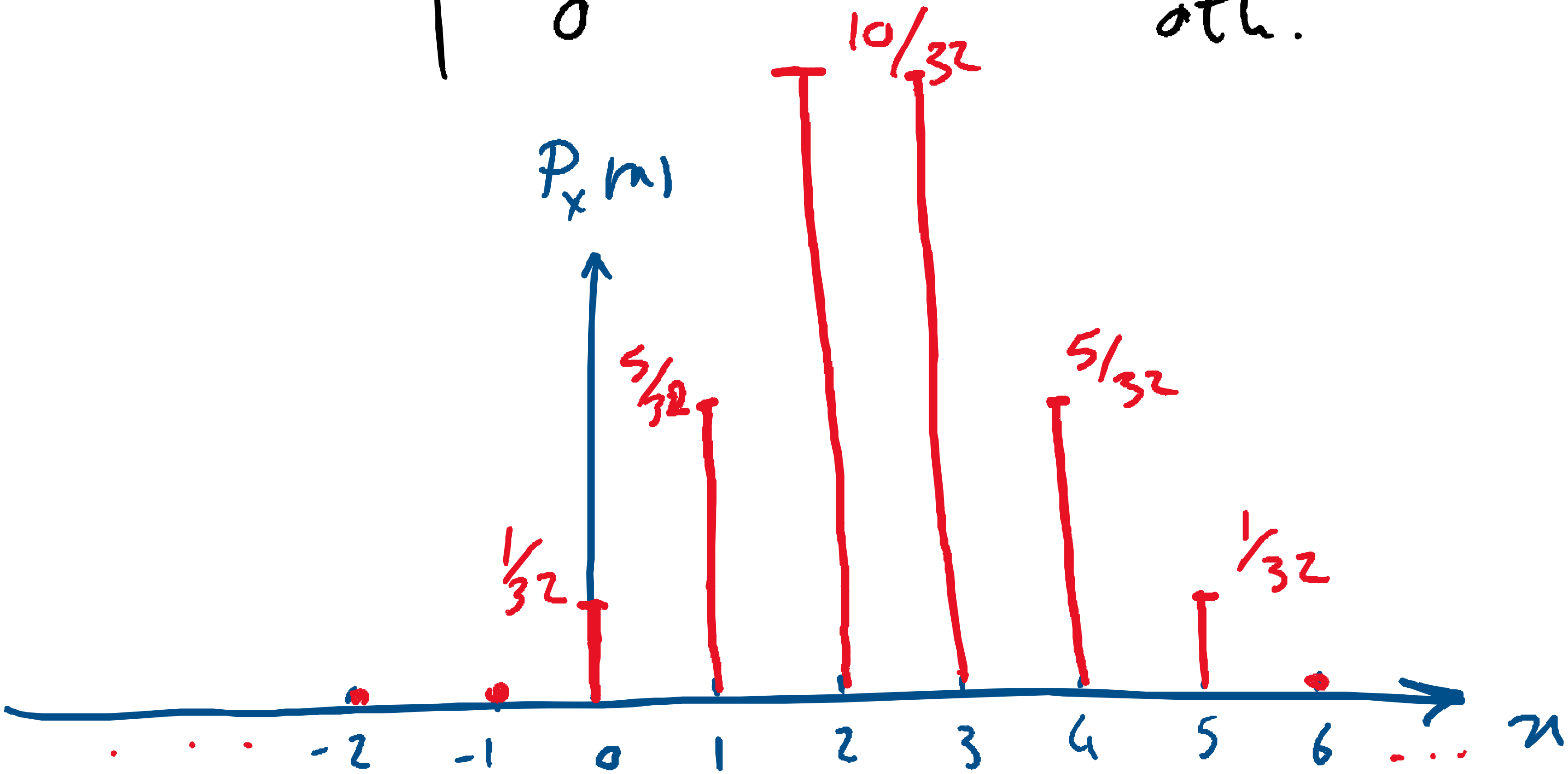
$$P(B) = \sum_{x=4}^{n} P_X(x)$$

$$P(B) = \sum_{x>3} P_X(x)$$

مثال 3 : برای $n=5$ ، $P=\frac{1}{2}$ ، مثال های قبل را حل کنید. (تابع pmf متغیر تصادفی X را رسم کنید)

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-x} & x \in \{0,1,\dots,5\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 & x \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$P(A) = \sum_{\substack{x=2k \\ x\leq 5}} P_X(x) = P_X(0) + P_X(2) + P_X(4)$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P_r\{X > 3\}$$

$$P(B) = \sum_{x>3} p(x) = \sum_{x=4}^{5} p_X(x)$$

$$P(B) = p_X(4) + p_X(5) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

* تابع $P_X(x)$ را می‌توانیم با کمک تابع ضربه‌ی گسسته نیز به صورت زیر بیان کنیم.

$$P_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\,\delta(x - x_i)$$

$$x_i \in \mathcal{X}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$P_r\{X \in A\} = \sum_{x \in A} P_X(x)$$

$A \subseteq \Omega$

با یک تابع pmf می توانیم احتمال هر پیشامدی را در رابطه با متغیر تصادفی

X به دست بیاوریم.

تابع Pmf فقط برای متغیرهای تصادفی گسسته قابل استفاده است

زیرا همان طور که قبلاً اشاره شد، برای متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمال

نقاط برابر صفر است. بنابراین در بخش بعدی، تابع احتمالی را معرفی

می کنیم که هم برای متغیرهای تصادفی پیوسته و هم برای متغیرهای تصادفی

گسسته قابل استفاده است.

Probability Distribution Function تابع توزیع احتمال *

(PDF)

یا

Cumulative Distribution Function تابع توزیع تجمعی

(CDF)

تابع توزیع احتمال برای یک متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \equiv P_r\{X(\xi) \leq x\}$$

یا

$$F_X(x) = P_r\{\xi \mid X(\xi) \leq x\}$$

تابع توزیع احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته فرم پلکانی دارد.

فرض کنیم X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که مقادیری از مجموعه‌ی

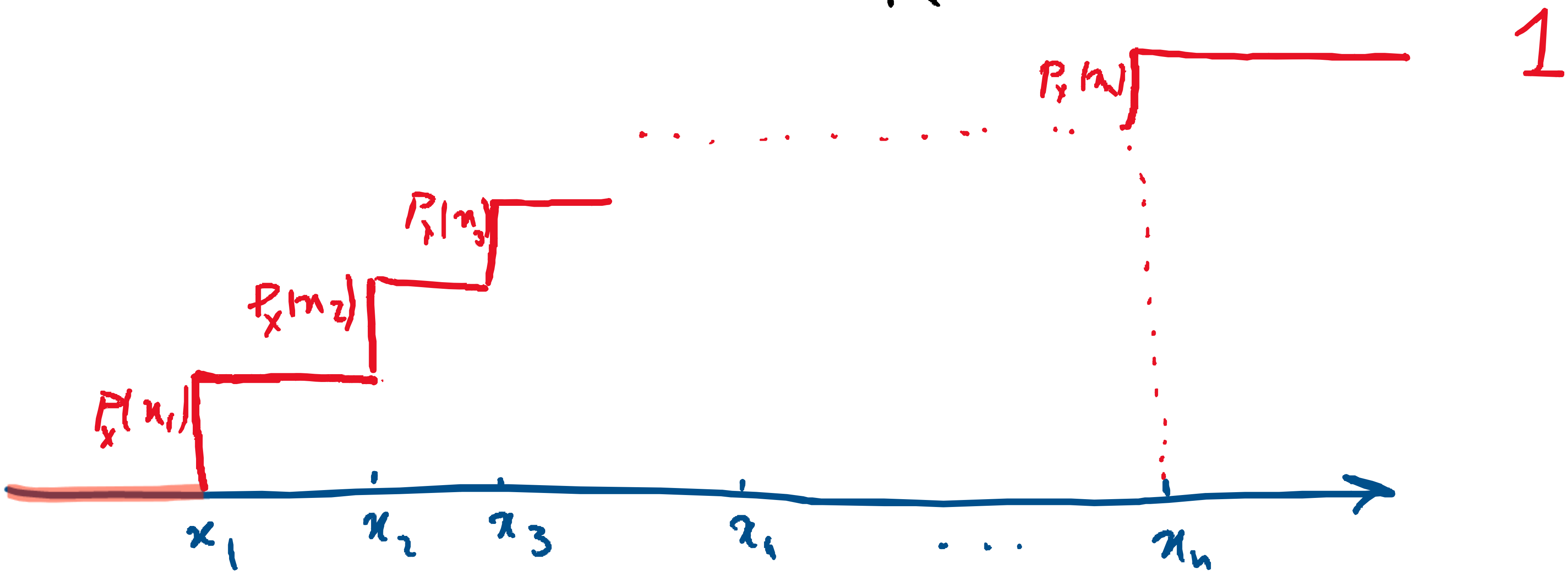
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

را اختیار می‌کند. می‌دانیم pmf این متغیر تصادفی را به صورت زیر است

$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \begin{cases} P_X(x_i) = P_i & x_i \in X \\ 0 & oth. \end{cases}$$

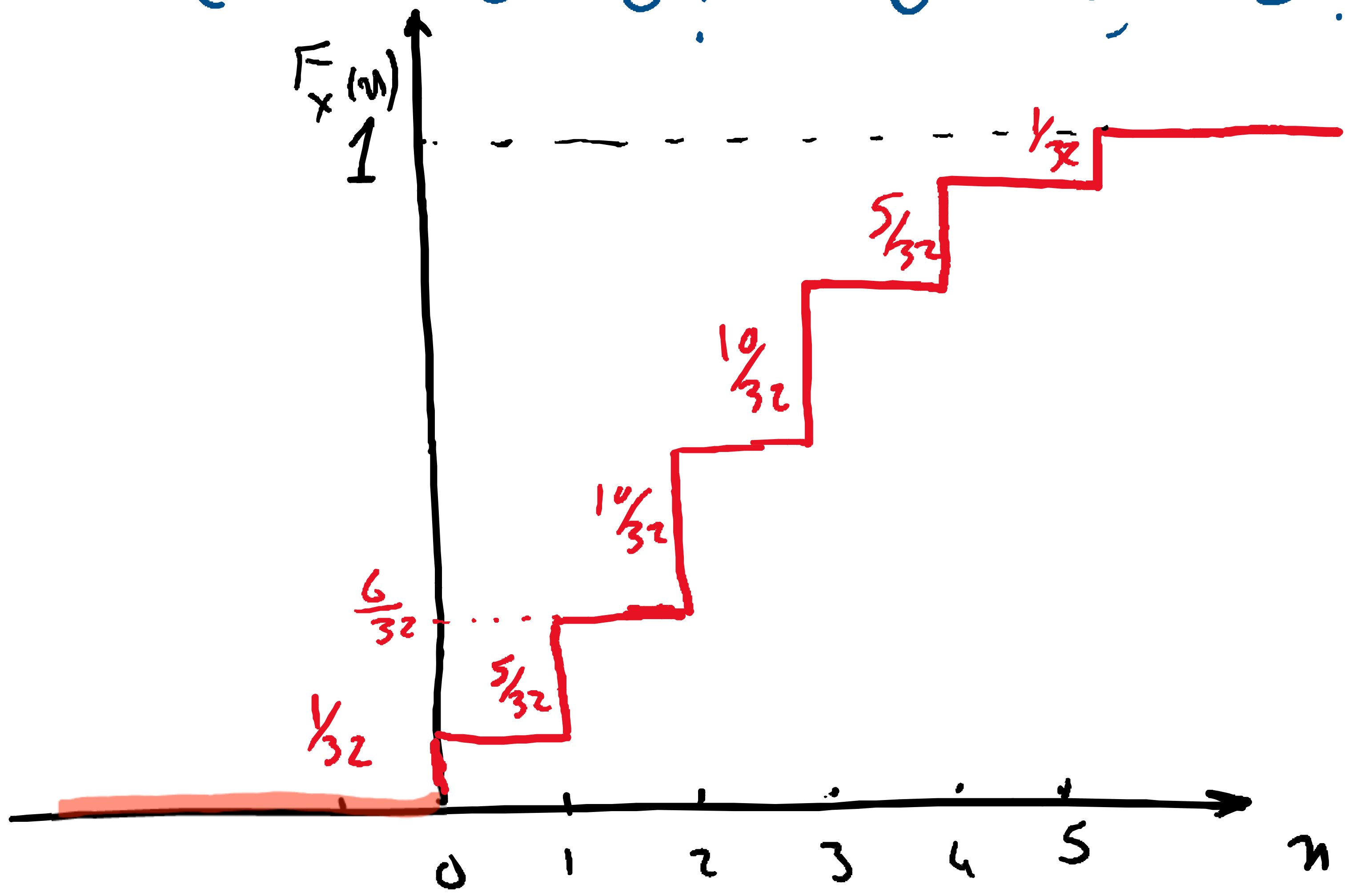
بنابراین تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی، به صورت زیر خواهد بود.

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i)$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_X(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ P_X(x_1) + P_X(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ P_X(x_1) + P_X(x_2) + P_X(x_3) & x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

مثال 4 : برای متغیر تصادفی در حله‌ای مثال 3 ، تابع $F_X(x)$ را رسم کنید.

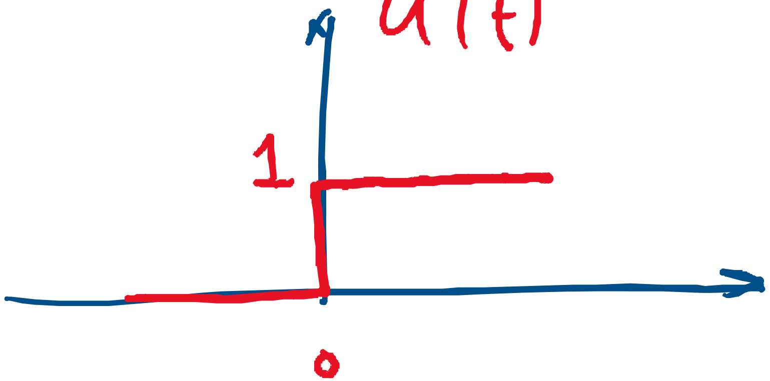


$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 & x \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

* تابع $F_X(x)$ را برای متغیر تصادفی گسسته ی X می‌توانیم با کمک تابع پله واحد نیز بیان کنیم.

$$F_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, u(x - x_i)$$

تابع پله واحد



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

* برای متغیر تصادفی پیوسته‌ی X ، تابع $F_X(x)$ یک تابع پیوسته از x خواهد بود.

این مطلب را با یک مثال ساده بررسی می‌کنیم.

مثال 4: می‌دانیم که زمان رخداد یک مکالمه‌ی تلفنی در بازه‌ی $[0, T]$ است. اگر بدانیم احتمال رخداد این مکالمه تلفنی در بازه‌ی t_1 تا t_2 به

صورت زیر است:

$$P_r\{t_1 \le t \le t_2\} = \frac{t_2-t_1}{T}$$

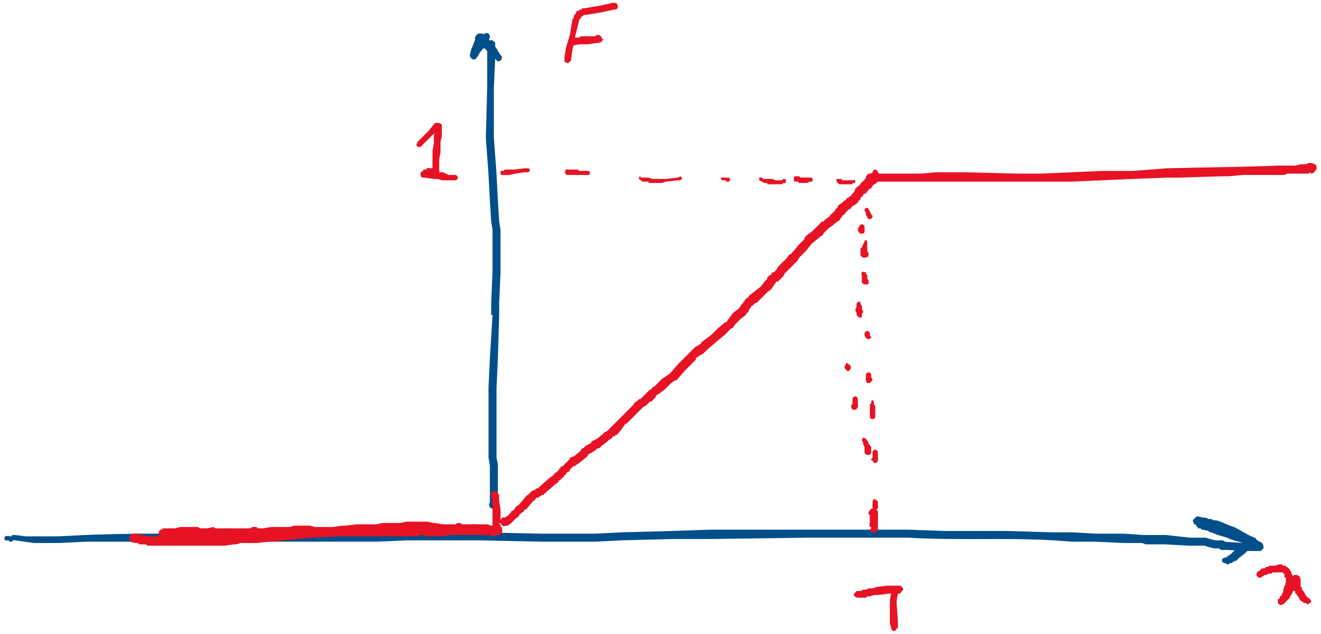
تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X که نشان دهنده‌ی زمان رخداد یک مکالمه تلفنی است را به دست بیاورید.

کرانی

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

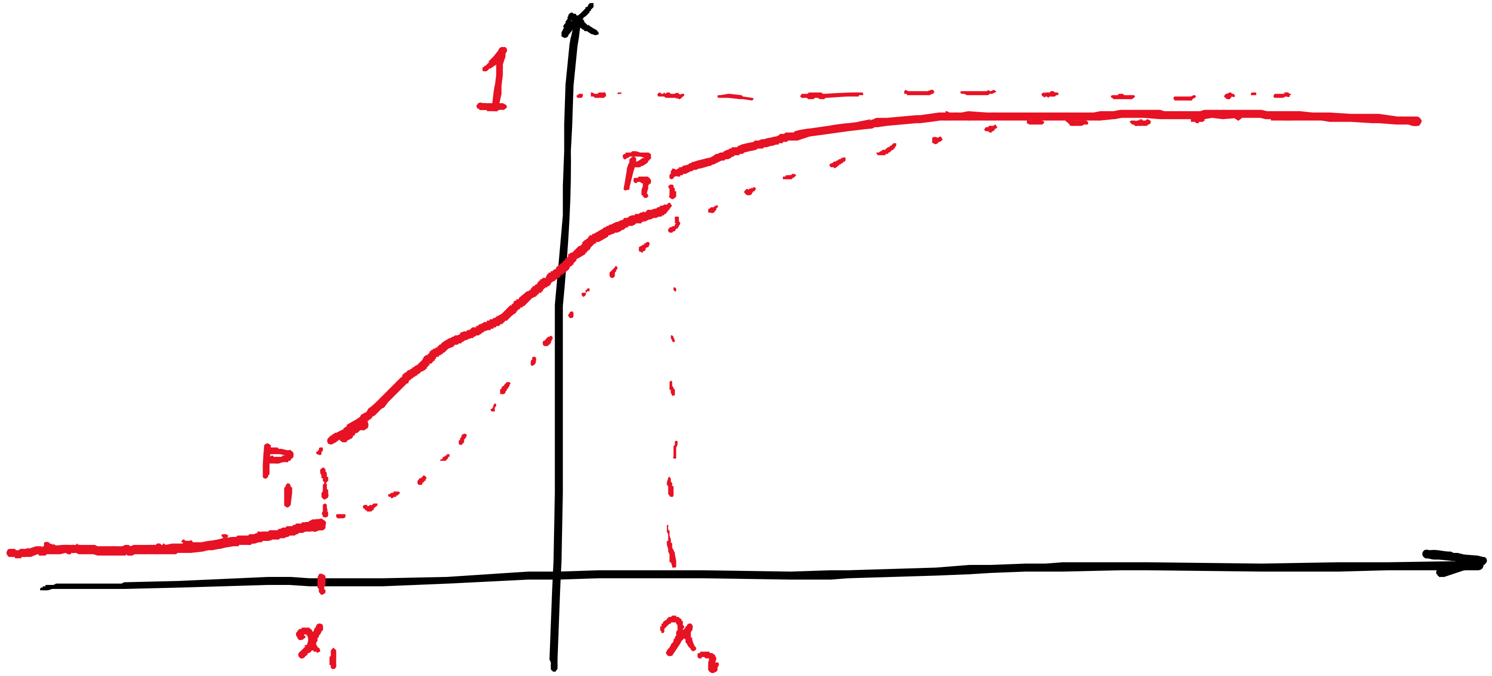
$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-0}{T} = P_r\{0 \leq X \leq x\} & 0 \leq x \leq T \\ 1 & x > T \end{cases}$$

$$P_r\{t_1 \leqslant t \leqslant t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{T}$$



تابعی پیوسته از
x است.

* در ریاضیات متغیرهای تصادفی ترکیبی نیز داریم که تابع توزیع احتمال آنها تکه‌ای پیوسته است.



$$P_r\{X = x_1\} = P_1$$

$$P_r\{X = x_2\} = P_2$$

$$\alpha \neq x_1, x_2$$

$$\downarrow$$

$$P_r\{X = \alpha\} = 0$$